Themenvorschlag für die schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik

für die 8. Klasse des Aufbaurealgymnasiums

im Haupttermin 1998/ 99

vorgelegt von Mag. Elisabeth Schmidt

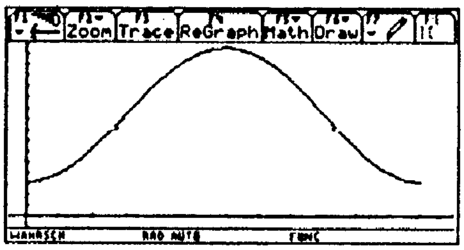
1) Weinfässer sind rotationssymmetrische Körper. Das Fassinnere kann man als Rotationskörper einer geeigneten um die x-Achse rotierenden Kurve betrachten.

a) Erstelle eine Skizze des Weinfasses und ermittle jeweils die Funktionsgleichung für die Kurve, wenn diese durch einen
- ∀ Parabelbogen,
- ∀ Ellipsenbogen,
- . Kreisbogen

approximiert wird.
Dabei habe das Weinfass folgende Innenmaße: Bodendurchmesser d_1= 160cm, Spunddurchmesser (größter Durchmesser) d_2=200cm, Höhe h= 200cm.

b) Berechne für alle drei Modelle das Volumen des Fasses in Liter. Wie groß ist der maximale prozentuelle Volumsunterschied zwischen den drei Modellen?

2) Die jahreszeitlich bedingte Veränderung des Sonnenstandes hat zur Folge, dass der zeitliche Verlauf der Sonnenenergiestrahlung näherungsweise durch eine Funktion der Art
$G(x) = a \, . \, \sin[b \, . \, (x + c)] + d$ (x=0: entspricht der Jahreswende)
beschrieben werden kann. Dabei bezeichnet G(x) die im Laufe eines Tages auf einen horizontalen Quadratmeter aus allen Richtungen auftreffende Sonnenstrahlung (sogenannte Globalstrahlung in kWh). Die Abbildung zeigt den Verlauf der Globalstrahlung in Rom innerhalb eines Jahres.



x-Achse: Monate
y-Achse: Globalstrahlung in kWh

Minimum: 1,6 kWh zur Jahreswende
Maximum: 7,8 kWh im Hochsommer

a)
- ∀ Erkläre die Bedeutung der Parameter a, b, c und d bei der Funktion G(x).
- ∀ Ermittle den Funktionsterm G(x) für Rom und berechne damit, innerhalb welches Bereiches die Globalstrahlung im März und November liegt.
- ∀ Bestimme die Jahressumme der Globalstrahlungsenergie in Rom.

b) Wir betrachten nun speziell die Globalstrahlung im Monat Juli in Rom. Es sei das tägliche Sonnenenergieangebot normalverteilt mit dem Erwartungswert G=7,7 kWh und der Standardabweichung Φ = 1,1 kWh.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Globalstrahlung mehr als 6 kWh beträgt?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei drei Besuchen in Rom im Monat Juli jeweils weniger als 6 kWh Globalstrahlung pro Tag erlebt?

- In welchem Bereich liegt mit 95% Wahrscheinlichkeit die Globalstrahlung im Monat Juli in Rom? (Ergebnisse auf zwei Dezimalstellen genau)

3a) Die Fichte ist in Nordeuropa und in den Gebirgen Mitteleuropas beheimatet. Das Wachstum von Fichten kann näherungsweiseweise durch die Funktion

$$h(t) = \frac{0{,}6}{0{,}02 + e^{-30kt}}$$

beschrieben werden. Dabei ist k eine Konstante und h(t) die Höhe einer Fichte in Metern t Jahre nach Beobachtungsbeginn.

∀ Wie hoch war eine dieser Fichten bei Beobachtungsbeginn?

∀ Berechne den Wert von k, wenn eine dieser Fichten 15 Jahre nach Beobachtungsbeginn 12 m hoch ist. Wie viele Jahren nach Beobachtungsbeginn hat eine Fichte die Höhe von 20 m erreicht?

∀ Berechne die erste Ableitung von h(t) für t=3 und interpretiere das Ergebnis.

∀ Zu welchem Zeitpunkt nach Beobachtungsbeginn ist die Wachstumsgeschwindigkeit am größten?

∀ Zeichne den Graph der Funktion im Intervall $0 \leq t \leq 40$ und trage die berechneten Werte ein.

b) Der Stammdurchmesser einer Fichte erreicht maximal etwa 1 Meter. Das Alter einer Fichte wird näherungsweise dadurch bestimmt, dass man den Durchmesser d des Stammes in 1,3 Meter Höhe misst. Es sei nun $y = \frac{1}{d}$ der Kehrwert des in Metern gemessenen Durchmessers und t das Alter der Fichte in Jahren.

∀ Erläutere das Modell: $\frac{dy}{dt} = k \cdot (1 - y)$

∀ Bestimme die zugehörige Funktion y(t) durch Lösen,der Differentiaigleichung.

∀ Wird die Zeit t in Jahren gemessen, dann hat die Proportionalitätskonstante den Wert k=0,05. Weiters kennt man den durchschnittlichen Stammdurchmesser d = 0,06 m einer 5jährigen Fichte. Welches Alter hat eine Fichte mit einem Durchmesser von 0,4 Metern?

4) Ein Patient bekommt zur Behandlung zusätzliche Vitamine verschrieben. Er benötigt täglich mindestens 10 mg Vitamin A, 24mg Vitamin B und 125mg Vitamin C. Zwei verschiedene Medikamente können verwendet werden. Eine Pille des Medikaments M_1 enthält 4mg Vitamin A, 6mg Vitamin B und 25mg Vitamin C und kostet 3.-S pro Pille. Eine Pille des Medikaments M_2 enthält 2mg Vitamin A, 6mg Vitamin B und 50 mg Vitamin C und kostet 5.-S pro Pille.

a) Wie viele Pillen von jedem Präparat sollte der Patient nehmen, um seinen täglichen Minimalbedarf an Vitaminen zu decken, und dabei die Kosten zu minimieren?

Stelle ein mathematisches Modell auf und verwende das graphische Lösungsverfahren. Kontrolliere das aus der Zeichnung erhaltene Ergebnis durch Rechnung und ermittle die minimalen täglichen Kosten. Welche Mengen an Vitamin A,B und C nimmt der Patient unter dieser Annahme täglich zu sich?

b) Wie ändern sich die täglichen Kosten, wenn als einschränkende Bedingung maximal 12mg Vitamin A pro Tag eingenommen werden dürfen, um eine Überdosierung zu vermeiden?

....

Fachprüfer Direktor

305026 BUNDESGYMNASIUM AMSTETTEN
Gymnasium/Realgymnasium unter besonderer Berücksichtigung der Informatik,
Schulversuch gern. 7 SCHOG

Schriftliche Aufgabenstellung aus Mathematik im Haupttermin 1999

Thema: **Der Abschlussabend unserer Wienwoche am 3.4.1997**

Bspl) Ein Kettenantrieb der Wiener U-Bahn

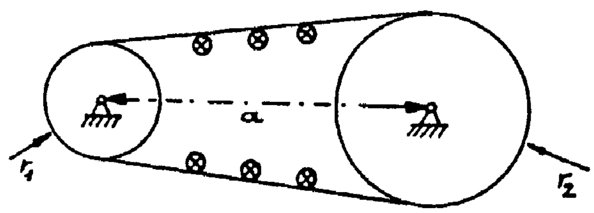
Bsp2) Eine Übungsaufgabe für einen Billardspieler

Bsp3) Ein Training auf der Bowlingbahn

Bsp4) Ein Weinheber bei einem Wiener Heurigen

Bspl) **Ein Kettenantrieb der Wiener U-Bahn**

Bei einem Kettenantrieb mit Zentralabstand a der Zahnräder und einem Übersetzungsverhältnis $r_1 : r_2$ wird durch Führungsrollen die Kette nahezu geradlinig geführt.



Ein Monteur berechnet die Kettenlänge folgendermaßen.
Er addiert die halben Kreisumfänge beider Zahnräder zum doppelten Zentralabstand a.

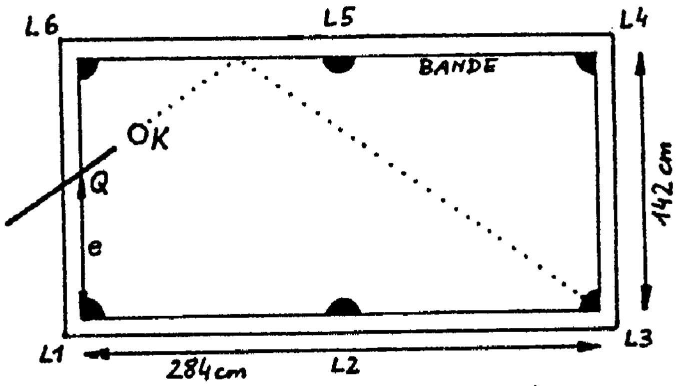
6 a) Welchen absoluten Fehler macht er bei einem Antrieb mit $a = 14$ m, $r_1 = 0{,}6$ m und einem Übersetzungsverhältnis von 3 : 5?
Ist daher seine Vorgehensweise in der Praxis gerechtfertigt und warum (warum nicht) ?

2 b) Der Monteur schließt die Kette mit einem Kettenschloss und möchte die Festigkeit dieser Stelle überprüfen. Wie oft (Anzahl + Restwinkel in Grad) muss er das Antriebsrad (r_1) drehen, damit das Schloss genau wieder an seine Ausgangslage gelangt?

4 c) Für welche Entfernungen a ist bei Beibehaltung der anderen Angabeelemente der absolute Fehler in einem Bereich von 1 cm bis 2 cm?

2 Z) Zeige durch Nachrechnen, dass der absolute Fehler nur von a und der Differenz der Radien abhängt, nicht aber von der Länge der Radien.

Bsp2) **Eine Übungsaufgabe für einen Billardspieler**



Eine Billardkugel K wird 100 cm von der Ecke L1 und 50 cm von der Ecke L6 aufgelegt. Ein Spieler setzt seinen Queu im Punkt Q (Entfernung von der Ecke L1 = e = 81.26..cm im Speicher des Rechners) und versetzt der Kugel K einen zentralen Stoß um sie mit einer Bandenberührung ins Loch (= Ecke) L3 zu bewegen.

6 a) Zeige durch Nachrechnen, dass er in die richtige Richtung gestossen hat.

3 b) Zeige durch Nachrechnen, dass die Kugelbahn die kürzeste Möglichkeit ist, von K über einen Punkt der Bande L4 L6 zum Loch L3 zu gelangen.

5 c) Die Kugel hat durch den Stoß eine Anfangsgeschwindigkeit von v(0) = v0 = 3 m/s und ihre Geschwindigkeit v(t) nimmt aufgrund der Reibung (Koeffizient m = 0.12) linear ab. Bei der Bandenberührung zum Zeitpunkt tb verliert die Kugel 15% ihrer Momentangeschwindigkeit und setzt danach ihre Bewegung mit der Geschwindigkeit vl fort.

$$v(t) = \begin{cases} v0 - \mu \cdot 9{,}81 \cdot t \\ v1 - \mu \cdot 9{,}81 \cdot t \end{cases}$$

Vervollständige die Geschwindigkeitsfunktion (tb, vl, te) und skizziere den zugehörenden Graphen (Achsenbeschriftung und -skalierung, wesentliche Eigenschaften).

Fällt die Kugel ins Loch?
* Falls ja, berechne ihre Endgeschwindigkeit.
* Falls nicht, berechne die Entfernung vom Loch L3.

4 Z) Berechne die Ausgangsgeschwindigkeit v0 so, dass die Kugel gerade noch ins Loch L3 fällt.

Bsp3) **Ein Training auf der Bowlingbahn**

Eine Mannschaft von drei Spielern (Christian (60%), Hannes (80%) und Thomas (10%» trainiert nach folgendem Prinzip:

- Jeder Spieler wirft zweimal auf seine 10 Figuren und erhält einen Punkt, wenn er mehr als die Hälfte der Kegel umwirft. Die in den Klammern angegebenen Werte beschreiben die momentane Wahrscheinlichkeit jedes Spielers, seinen Punkt zu gewinnen:
- Ein Mannschaftsspiel besteht aus den drei Einzelspielen der Mitglieder und gilt als gewonnen, wenn mindestens zwei Spieler punkten.

1 a) Zeige durch Nachrechnen, dass die Mannschaft etwas mehr als die Hälfte aller Mannschaftsspiele gewinnt.

5 b) 5 Mannschaftsspiele werden zu einer Trainingseinheit zusammengefasst.
Die Trainingseinheit gilt als Erfolg, wenn mehr als die Hälfte der 5 Mannschaftsspiele gewonnen wird.

Gib die Wahrscheinlichkeitsfunktion für die mögliche Anzahl gewonnener Mannschaftsspiele einer Trainingseinheit an.

Berechne die Wahrscheinlichkeit für eine erfolgreiche Trainingseinheit.

Berechne Erwartungswert und Standardabweichung für die gegebene Verteilung und beschreibe die Bedeutung dieser Werte für dieses Beispiel.

6 c) Die Mannschaft beschließt durch zusätzliche Trainingswürfe für Thomas, dessen Leistung zu verbessern. Nach 12 Trainingswürfen konnte Thomas seine Gewinnwahrscheinlichkeit bereits auf 20% steigern.

Berechne die Anzahl der Trainingswürfe die mindestens notwendig sind, damit Thomas durchschnittlich jeden zweiten Punkt erreicht.

Hinweis: Verwende P(n) als Gewinnwahrscheinlichkeit(Anzahl der Trainingswürfe).

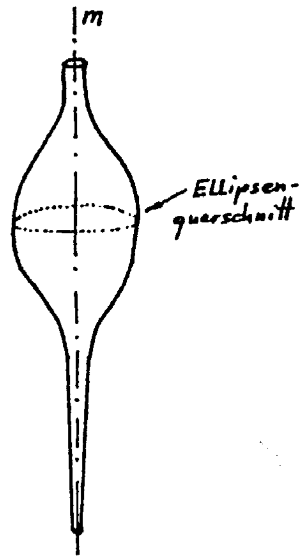
Wie groß (%) ist der Trainingserfolg der ersten 25 Übungswürfe?

Bsp4) **Ein Weinheber bei einem Wiener Heurigen**

Ein 85cm hohes Glasgefäß hat folgende Form des inneren Hohlraums:

Jeder waagrechte Querschnitt ist eine Ellipse mit den Durchmessern 2 . a(h) und 2 . b(h).

Bis zu der Höhe $h1 = 31$ cm hat das Gefäß die Form eines Drehkegels, also a(h)=b(h), und geht dann in den bauchigen Teil über.
b(h) bleibt ab dieser Höhe konstant = b(31), sodass das leere Gefäß stabil niedergelegt werden kann. (Siehe Längsschnitt LB)



a(h) wird bis zur Höhe h2 festgelegt mit Hilfe der Funktion

$$f(h) = 2 \cdot \sin\left(\frac{h}{8} + 1\right) + 4$$

Dabei ist h2 so zu wählen, dass der Querschnitt in dieser Höhe wieder ein Kreis ist.
Der Übergang in Höhe hl vom Drehkegel zum bauchigen Teil verläuft für a(h) glatt, d. h. ohne Knick des Längsschnitts LA.

Der letzte Teil (h2 < h < 85) des Weinhebers ist zylinderfömig.

a) Berechne den Durchmesser der unteren Öffnung.

1

b) Berechne den maximalen Umfang des Gefäßes, wenn man eine konstante Materialstärke von 2 mm annimmt.

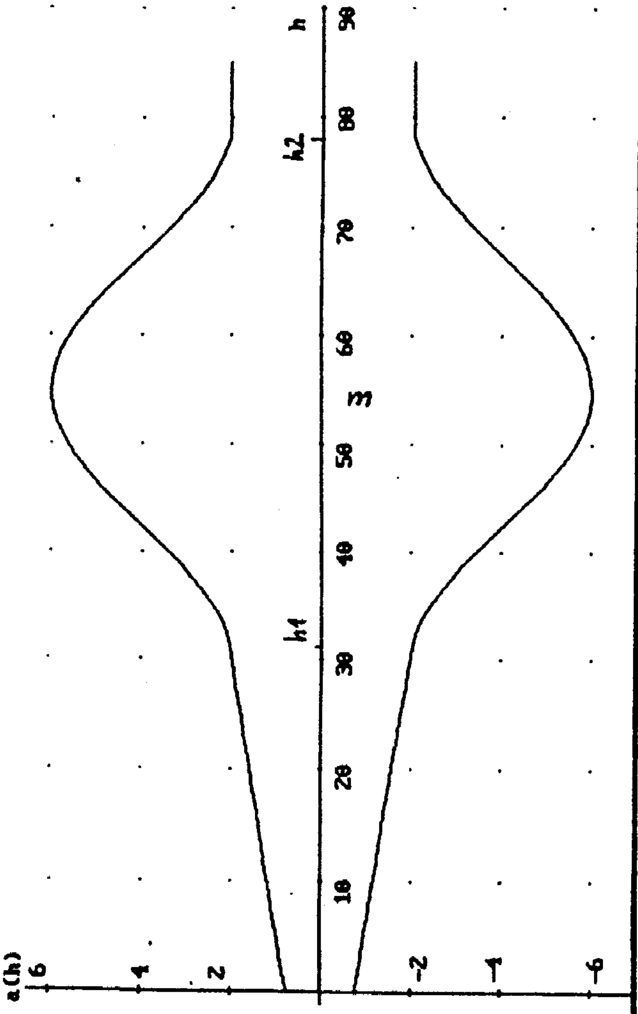
2

3 c) Berechne das maximale Fassungsvermögen des Weinhebers in Liter.

1 d) Ist das Gefäß in der Höhe h2 überall glatt, oder gibt es einen Knick?

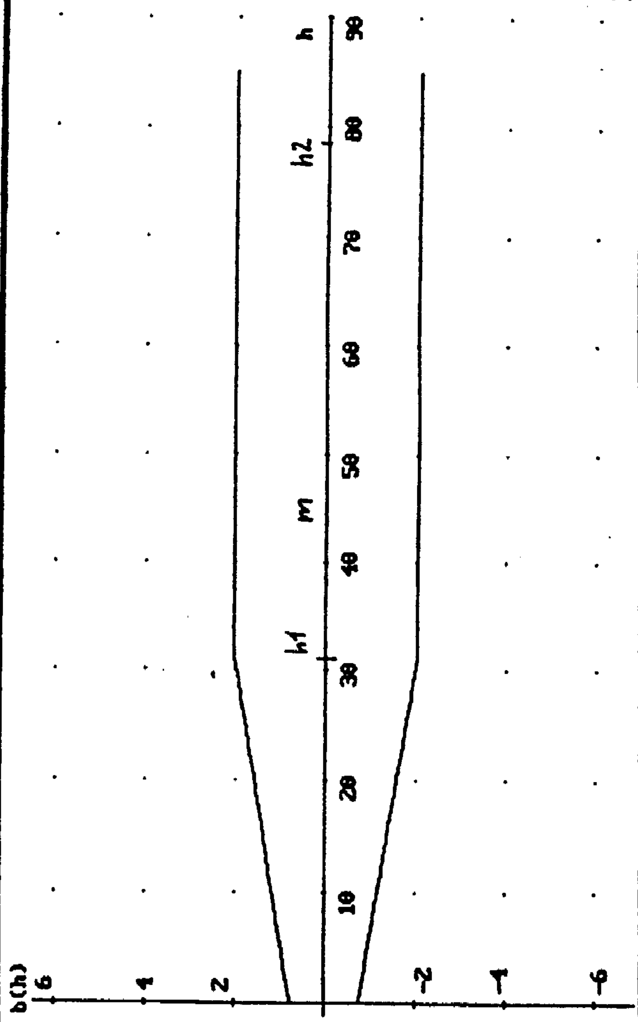
3 e) Ergänze die Markierungen für die Füllmenge 1/8 Liter und 1 Liter in der Angabe.

LA: senkrechter Schnitt durch Achse m



Ansicht von vorne

LB: senkrechter Schnitt durch Achse,



Ansicht von der Seite

Amstetten, am 15.2.1999

Bundesrealgymnasium und Bundes-
Oberstufenrealgymnasium
A-3100 St. Pölten, Schulring 16

8C-Klasse(1998/99)

1. Aufgabe:

Mechanische Unruhen in Uhren, Federungseinrichtungen in Kraftfahrzeugen und Eisenbahnwaggons und elektrische Schwingkreise erzeugen bei einer einmaligen Erregung, ohne weiteren Antrieb, eine gedämpfte Schwingung der Form:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

a) Wie groß ist die Dämpfungskonstante *, wenn bei $t = \dfrac{5 \cdot \pi}{2 \cdot \omega}$ s und T = 2.Bs^{-1} die zugehörige Auslenkung y(t) der gedämpften Schwingung um 40 % kleiner als die ungedämpften Schwingung ist? (auf 5' Dez.)
Nehme für die weiteren Berechnungen eine ursprüngliche Auslenkung y_0 mit '5 Einheiten an! Wie lautet nun die Funktion der gedämpften Schwingung?

b) Es ist zu zeigen, dass die Kurve der gedämpften Schwingung zwischen ihren beiden Einhüllenden $y(t) = +y_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$ und $y(t) = -y_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$ liegt. Skizziere dazu die gedämpfte Schwingung und die beiden Einhüllenden! Berechne die Berührpunkte der Dämpfungskurve mit ihrer Einhüllenden $y(t) = +y_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$ im Intervall t , [0,3 s].

c) Wie läßt sich nachweisen, dass die Kurven einander berühren und nicht bloß schneiden? Zeige, dass die Schwingungsextrema nicht mit den Berührungsstellen zusammenfallen!

d) Sind die Wendepunkte der Dämpfungskurve - so wie bei der Sinuskurve – mit ihren Nullstellen identisch? Begründung!

2. Aufgabe:

a) Die Weltbevölkerung betrug 1950 etwa 2,515 Milliarden Menschen, 1989 etwa 5,201 Milliarden Menschen. Wir nehmen „überexponentielles" Wachstum an, die dazugehörige Differentialgleichung lautet:

$$dy = k.y^2.dt$$

Ermittle die Wachtumsfunktion zuerst allgemein und dann für die gestellte Aufgabe. Erstelle eine Wertetabelle für die Wachstumsfunktion der Weltbevölkerung in den Jahren 1950 bis 2020 für jedes zehnte Jahr. Interpretiere diese Ergebnisse und vergleiche - soweit wie möglich - mit den tatsächlichen Werten! Gib ein geeignetes Zeitintervall an und was wäre am Ende deines Intervall zu erwarten! Skizziere die Funktion!

b) Eine Bakterienkultur wächst in einer Nährlösung; diese kann höchstens 105 000 Individuen aufnehmen. Zunächst werden 1 000 Individuen in die Nährlösung gegeben; nach vier

Stunden sind es bereits 3000. Wie viele sind es nach acht Stunden? Wann hat die Nährlösung eine Auslastung von 95 % erreicht? Stelle unter Annahme logistischen Wachstums die Differentialgleichung und die zugehörige Wachstumsfunktion auf und beantworte dann die gestellten Fragen. Wodurch ist ein logistisches Wachstum gekennzeichnet?

3. Aufgabe:

a) Zwei Orte A und B liegen in einer Ebene 12,5 km voneinander entfernt. Ein Flugzeug, das im geraden Horizontalflug über die beiden Orte (von A in Richtung B) direkt hinwegfliegt, wird gleichzeitig in A unter dem Höhenwinkel 79,5° und in B unter 37,94° gemessen. Nach 30 s wird eine zweite Peilung vorgenommen und es werden die Winkel in A mit ∀‘ = 38,83° und in B mit ß‘ = 77,28° gemessen. Bestimme die Höhe h und die Geschwindigkeit v des Flugzeuges. (Keine Instrumentenhöhe). Visualisiere durch eine Skizze!

b) Ein vom Flugzeug abgeworfener Gegenstand beschreibt unter Einwirkung der Schwerkraft und unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes eine Parabelbahn. Die Parabelbahn setzt sich zusammen aus: Weg in die x-Richtung $x = v \cdot t$, Weg in die y-Richtung $y = h - \frac{g \cdot t^2}{2}$.
Zeige, dass ein genau über A vom Flugzeug abgeworfener Gegenstand unter den gegebenen Annahmen ziemlich genau im Punkt B auf die Erde fällt. ($g = 9{,}81\ m/s^2$)

4. Aufgabe:

Nach der Einführung der Autobahnvignette in Österreich betrug Statistiken zufolge der Anteil der AutobahnbenutzerInnen, die keine Vignette geklebt haben, 3 %.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf einem Autobahnrastplatz nicht alle der zwölf parkenden Autos eine Vignette geklebt haben?

b) Eine Polizeistreife überprüft täglich etwa 400 Autos auf Autobahnen.
   *) Wie viele FahrerInnen ohne Vignette wird diese Streife im Mittel täglich antreffen?
   **)Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, an einem Tag mehr als 15 FahrerInnen ohne Vignette anzutreffen? Interpretiere das Ergebnis!

c) Wie oft muss eine Polizeistreife kontrollieren, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens 1 FahrerInn ohne Vignette anzutreffen, 95 % übersteigt?

d) In welchem Bereich liegt mit 80 %iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der FahrerInnen ohne Vignette, die die Polizeistreife an einem Tag antrifft? Visualisiere durch eine Skizze!

Punkteverteilung:

1. Beispiel: 14 Punkte
2. Beispiel: 14 Punkte
3. Beispiel: 10 Punkte
4. Beispiel: 10 Punkte

Bundes - Oberstufenrealgymnasium

A - 1010 Wien, Hegelgasse 14

Wien, am 11. Februar 1999

THEMENVORSCHLAG FÜR DIE KLAUSURARBEIT AUS MATHEMATIK (unter Verwendung des TI-92)

Haupttermin 1998199
Klasse: ORG mit ergänzendem Unterricht in Biologie, Physik und Chemie
Themensteller: Mag. Binder Gertrude

1) Es gilt: Sei P ein Punkt des Umkreises eines Dreiecks. Zeichnet man zu jeder Dreieckseite eine Normale durch P, so liegen die Fußpunkte dieser Normalen auf einer Geraden (WALLACE - Gerade).
Die Gültigkeit dieses Satzes ist für das Dreieck *ABC [A(O/-5), B(3/4), C(-4/3)]* und den Punkt P(-4/y < 0) rechnerisch **und** konstruktiv zu zeigen. 12P

2) Der Querschnitt eines Tunnels sei gegeben durch den oberhalb der x-Achse gelegenen Abschnitt der Parabel 2. Ordnung: $y = -ax^2 + b$ *mit* $a, b > 0$.
Berechne den Flächeninhalt in Abhängigkeit von a und b.
Der Tunnel soll in 3m Höhe noch 8m breit sein. Berechne die Größen a und b so, dass der Flächeninhalt ein Minimum annimmt. Das Minimum ist nachzuweisen. Wie groß ist der minimale Flächeninhalt?
Zeichne den Tunnelquerschnitt in einem geeigneten Maßstab in ein Koordinatensystem.
12P

3) Vor dem Bau des Tunnels sollen seine Länge $\overline{BC}$ und der Steigungswinkel (v bestimmt werden.
Zu diesem Zweck steckt man beiderseits des Berges 2 horizontale Standlinien $\overline{AB}$ = 400m und $\overline{CE}$ = 500m ab. Das am Berggipfel aufgestellte Signal S ist vom Tunneleingang C nicht sichtbar. Geht man von *C 150m* in Richtung E, so sieht man von diesem Punkt D das Signal unter dem Höhenwinkel 28,9°.
Die Übrigen Höhenwinkel zu S sind: von A aus 19,7°, von B aus 40,5° und von E aus 16,7°. Alle Punkte liegen in einer Vertikalebene. Berechne die benötigten Größen.
12P

4) a) Leite die Hyperbelgleichung $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ aus der geometrischen Definition der Hyperbel $hyp = \{X / \left|\overline{XF_1} - \overline{XF_2}\right| = 2a$ her.

b) Eine Blumenschale hat als äußere Begrenzungen die Form eines halben einschaligen Drehhyperboloids (Achsenschnitt: hyp: $x^2 - y^2 = 10$, Einheit: cm) und als innere Begrenzung die eines Drehparaboloids (Achsenschnitt: *par* : $y = \frac{x^2}{40} + 12$, Einheit: cm). Die Gesamthöhe des Gefäßes beträgt 25 cm.
Weiche Masse hat das Gefäß, wenn es aus Beton (Δ = 2,5 g/cm³) besteht und mit Wasser 10 cm hoch gefüllt ist? 12P